On a $0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(U_n - 1) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

or $\frac{1}{2}(U_n - 1) \geqslant U_{n+1} - 1$

$\Rightarrow U_{n+1} - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) a) Pour $n = 1$;

$1 < S_1 = U_1 = \frac{4}{3} \leqslant 1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$n < S_n \leqslant n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que

$n + 1 < S_{n+1} \leqslant n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$;

$0 < U_k - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$